Mit dem TI-92 zum Abitur
Inhaltliche Gestaltung eines LK Analysis

Dr. Sibylle Stachniss-Carp, Lahntal
stachnisscarp@bop.de

Zunächst wurde ein inhaltliches Konzept vorgestellt, das in dieser Form im Schuljahr 98/99 mit Schülern eines Leistungskurses an der Lahntalschule Biedenkopf erprobt wurde. Den 16 Schülerinnen und Schülern standen für zwei Jahre Leihgeräte zur (ständigen) Verfügung. Die Analysis wird in 12/1 abgehandelt, Thema in 12/2 ist Analytische Geometrie/Lineare Algebra, in 13/1 ist das Thema Stochstik verbindlich.
Das Kursthema in 13/2 kann relativ frei gewählt werden und ist nicht Bestandteil der schriftlichen Prüfung.
Voraussetzungen an der Lahntalschule: Im Jahrgang 11 wird mit der Einführung in die Differentialrechnung begonnen, einfache Kurvendiskussionen ganz-rationaler Funktionen schließen sich an. Im zweiten Halbjahr werden Exponentialfunktionen und gebrochen-rationale Funktionen mit den entsprechenden Ableitungsregeln eingeführt und diskutiert. Einfache Extremwertaufgaben und sog. „Steckbriefaufgaben“ werden behandelt. CAS wird höchstens punktuell eingesetzt.

Analysis im LK 12/13

1. Regressionsrechnung

- Wahlhochrechnung, Regressionsgerade
- Anpassung von Funktionen an Daten

2. Einführung in die Integralrechnung

- Flächenberechnung über Ober/Untersummen und Trapezsummen
- Hauptsatz der Integral- u. Differenzialrechnung
- Flächen zwischen zwei Kurven
- Mittelwerte und andere Anwendungen

3. Weiterführung der Integralrechnung

- Volumen von Rotationskörpern
- Berechnung von Bogenlänge und Mantelfläche
- Partielle Integration

4. Wachstum und Zerfall

- Wachstumsprozesse als Folgen
- Von der Folge zur Differenzialgleichung
- Lösung von bestimmten Differenzialgleichungen durch „Trennung der Variablen“
- weitere Anwendungsaufgaben

5. Ergänzungsthemen in 13/2

- Vollständige Induktion
- Polarkoordinaten
- Komplexe Zahlen

Welche Inhalte verändern sich mit dem Rechnereinsatz gegenüber dem herkömmlichen Konzept, was kommt hinzu?

1. Für sehr wichtig halten wir die frühzeitige Behandlung der Regressionsrechnung. Damit steht für nachfolgende realitätsnahe Aufgaben ein Werkzeug zum Anpassen von Kurven an gegebene Daten zur Verfügung (siehe Aufgabe 1).

2. Die Einführung in ein neues Themengebiet sollte wenn möglich anhand einer realitätsnahen Aufgabe erfolgen und zu einer selbstständigen Auseinandersetzung der Schüler mit der Problemstellung führen (siehe Aufgabe 2).

3. Neue Schwerpunkte ergeben sich bei dem Thema „Wachstum und Zerfall". Die Modellierung einer Aufgabenstellung mit einer Folge, der Übergang von der Differenzengleichung zur Differenzialgleichung und die Möglichkeiten der grafischen Darstellung (Folgenplot, Richtungsfelder, Funktionsgraf) bieten faszinierende Möglichkeiten (Aufgabe 3).

4. Kurvendiskussion als eigenständiges Thema kommen im vorgelegten Konzept nicht vor. Dies liegt auch an den Kursinhalten des Jahrgangs 11.

Zu entsprechenden Abituraufgaben siehe WS 117 und 213 (Dr. N. Esper/ Dr. H. Weller).

Von den Workshop-Teilnehmern wurden die folgenden Aufgaben bearbeitet und vorgestellt.

Aufgabe 1: (aus der Abituraufgabe Stochastik)

Die AG „Wahlen" eines Gymnasiums beschäftigt sich mit verschiedenen Aspekten rund um die kommende Bundestagswahl.

Wahlhochrechnung

Um am Wahlabend eine Hochrechnung für das Abschneiden der einzelnen Parteien erstellen zu können, werden für die bereits ausgezählten Bezirke die Wahlergebnisse der vorherigen Wahl und die aktuellen Ergebnisse erfasst und mit Hilfe einer Regressionsgeraden ausgewertet.

Wenden Sie das Verfahren auf die vorliegenden Wahlergebnisse der Partei A für 1994 und 1998 an und erläutern Sie Ihr Vorgehen. (Angaben in %)

Landkreis	Marburg	Biedenkopf	Kirchhain	Gladenb.	Stadtall.	Gesamt
Partei A 1994	30.9	37.0	39.1	42.5	49.6	37.0
Partei A 1998	28.6	32.7	34.3	37.3	44.1	

Lösungshinweise:

Die Ergebnisse der einzelnen Wahlkreise werden als Punktwolke aufgefasst und in ein Koordinatensystem eingetragen (1994 $\rightarrow$ x ; 1998$\rightarrow$ y)
Eine möglichst gute Näherungsgerade **$y = m{*}x + b$** soll gefunden werden. Der Zahlenwert y(Gesamtergebnis 1994) liefert den Schätzwert für das Gesamtergebnis 1998.

Die Problemlösung kann (sollte) in mehreren Stufen erfolgen.

1. Rein experimentelles Vorgehen - der grafische Anlauf

Die Schüler zeichnen die Punktwolke (DATA/MATRIX-Editor und Plot) und versuchen, eine „passende“ Gerade zu einzuzeichnen.

2. Theoretische Überlegungen und experimentelles Vorgehen

Um die „passende“ Gerade im Rechner darzustellen, muss man sich über die ungefähre Größe der Parameter m und b klar werden, z.B. könnte man die Gerade durch zwei Punkte legen und m und b berechnen. Mit diesen „Startwerten“ läßt sich weiter experimentieren.

3. Experimentieren mit DGS

Mit der Geometrieanwendung des TI können Gerade und Abstandsquadrate konstruiert und berechnet werden. Der Nutzer zieht an der Geraden, der Rechner liefert die Summe der Abstandsquadrate und die Geradengleichung.

4. Die „beste“ Näherungsgerade – der numerische Anlauf

Gibt es ein Kriterium, um die vorhandenen Lösungsansätze zu beurteilen?
Die Summe der Abweichungen der Tabellenwerte von den Funktionswerten soll minimal werden. Der Sinn der Einführung der quadratischen Abstandssumme sollte diskutiert werden. Es seien y (x_k) die Funktionswerte der Geraden an der Stelle x_k und c2(x_k) die zugehörigen Datenwerte. Damit ergibt sich:

$$fehler(m,b) = \sum_{k=1}^{n} (y(x_k) - c2(x_k))^2$$

Mit den Parametern m und b dieser Funktion und einem Tabellenkalkulationsprogramm kann weiter experimentiert werden. Auch dynamische Geometriesoftware lädt zum Experimentieren ein.

5. Der analytische Weg

Im Unterricht wird von den Schülern der Vorschlag kommen, den Tiefpunkt der Funktion f(m,b) zu bestimmen.
a) Entweder wird die zusätzliche Forderung gestellt, dass der Schwerpunkt der Punktwolke (Mittelwerte der Daten) auf der Geraden liegen soll. Damit kann ein Parameter eliminiert werden, so dass die Berechnung der Ableitung unproblematisch ist.
b) Schüler kommen zum Teil auch ohne Wissen über partielle Ableitungen zu der Erkenntnis, dass hier notwendige Bedingungen an ein relatives Minimum Nullstellen der Ableitung nach a und der Ableitung nach b sind. Damit erhält man zwei Gleichungen, aus denen m und b berechnet werden können.
c) Zur Vertiefung kann der in a) angesprochene Weg in allgemeiner Form als Lehrbuchtext nachvollzogen oder hergeleitet werden.

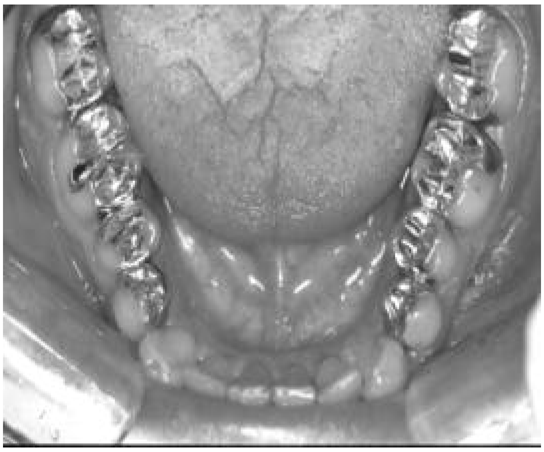
6. Automatische Bestimmung der Näherungsfunktion

CAS-Systeme bieten im allgemeinen mehrere Typen von Näherungsfunktionen an. Nach Auswahl des Funktionstyps erfolgt die Berechnung automatisch. Eine Verwendung dieser Funktionen kann nach der Behandlung des mathematischen Hintergrundes anschließend als „black-box“ erfolgen.

Aufgabe 2:

Einführung in die Integralrechnung

Herr Mayer und seine Amalgamfüllungen



Herr Mayer fühlt sich seit längerer Zeit krank. Er hat gehört, dass die Quecksilberbelastung aus Amalgamfüllungen die Ursache sein könnte und will sich nun alle Füllungen entfernen lassen.
Er stimmt zu, an einer wissenschaftlichen Untersuchung teilzunehmen, bei der **vor** und **nach** der Entfernung der Amalgamfüllungen (über einen Zeitraum von 6 Monaten) die Menge des über den Urin ausgeschiedenen Quecksilbers gemessen wird und dann die Gesamtmenge des ausgeschiedenen Quecksilbers bestimmt werden soll.

Die erste Messung unmittelbar vor der Entfernung der Füllungen ergibt:
Hg-Menge im Urin: 3.5 µg/Tag

Wir wollen wissen, welche Quecksilbermenge Herr Mayer innerhalb von 180 Tagen ausscheidet.

Hypothese 1: Die Quecksilberausscheidung ist gleichbleibend und somit nicht abhängig von der Menge der vorhandenen Füllungen. (Viele Zahnärzte unterstützten diese Hypothese.)

Hypothese 2: Die Hg-Ausscheidung ist abhängig von der Menge der Amalgamfüllungen.

Aufgabe:

1) Wie groß ist die ausgeschiedene Hg-Menge, wenn Hypothese 1 zutrifft?

2) Bei Herrn Mayer wird nach Entfernung aller Amalgamfüllungen die ausgeschiedene Hg-Menge gemessen:

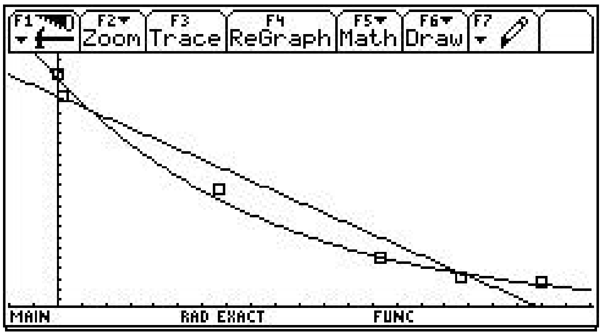
Zeit in Tagen	0	2	60	120	150	180
Menge Hg in mg/Tag	3.5	3.2	1.8	0.8	0.5	0.4

Stelle diesen Zusammenhang in einem Koordinatensystem dar.

3) Überlege und rechne gemeinsam mit Deinem Nachbarn:
- Wie könnte man die gesuchte Quecksilbermenge berechnen?
- Läßt sich Eure Methode noch verbessern?

Lösungshinweise:

a)Graphische Darstellung der Daten



1. Ausgleichsgerade:
$y1(x) = -0{,}018x + 3{,}2$

Hg-Menge: $0.5 \cdot 178 \cdot 3.2 =$ **284.8 mg**

2. Exponentialfunktion als Regressionskurve:
$y1(x) = 3.46 \cdot 0.988^x$

Problem: Bestimmung der Hg-Menge als Fläche unter der Kurve.

b) Schüleraktivitäten zur näherungsweisen Berechnung, Gruppenarbeit, Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse.

c) Verallgemeinerung und Optimierung der Schülervorschläge durch „Module“:

$$trapsum\,(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 0{,}5\left[y1(\frac{180}{n}\cdot i) + y1(\frac{180}{n}(i+1))\right]\cdot\frac{180}{n}$$

$$osum\,(n) = \sum_{i=0}^{n-1} y1(\frac{180}{n}\cdot i)\cdot\frac{180}{n}$$

$$usum\,(n) = \sum_{i=1}^{n} y1(\frac{180}{n}\cdot i)\cdot\frac{180}{n}$$

d) Variation von n

Darstellung in Tabellenform
y3: trapsum(n)

y4: osum(n)

y5: usum(n)

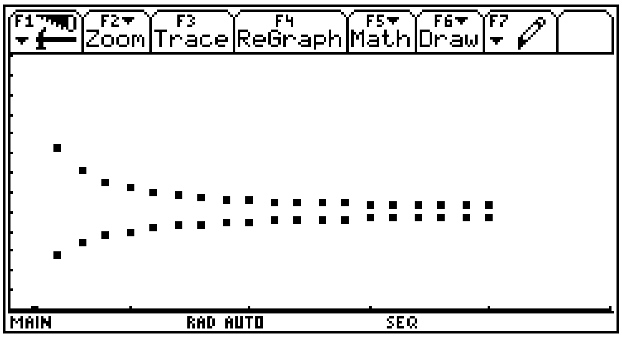
x	y3	y4	y5
10.	252.17	279.88	224.47
15.	251.61	270.08	233.14
20.	251.41	265.26	237.56
25.	251.32	262.4	240.24
30.	251.27	260.5	242.04
35.	251.24	259.15	243.32
40.	251.22	258.15	244.29
45.	251.21	257.36	245.05

x=10.

MAIN RAD EXACT FUNC

Graphen der Folgen

osum(n) bzw. usum(n)



Grenzwertbildung

$$\lim_{n\to\infty} usum(n) \le Flächeninhalt \le \lim_{n\to\infty} osum(n)$$

Aufgabe 3:

Wachstum und Zerfall

Die folgende Messreihe beschreibt die Abkühlung eines Bechers Kaffe bei einer Zimmertemperatur von 18.7°C.

Zeit (min)	0	2	4	6	10	12	14	16	18	20	26	30	34
Temp	68.1	63.9	60.5	57,2	52.8	50.5	48.6	47.6	46	44.0	41.1	39	37.3

Suche ein mathematisches Modell, das diesen Vorgang hinlänglich genau wiedergibt und Prognosen ermöglicht (z.B.: Wie heiß ist der Kaffee nach 70 min? Wann ist eine Temperatur von 30° erreicht?)

1) **Numerischer Ansatz**
Stelle die Daten grafisch dar und suche eine passende Ausgleichskurve.
Sind Prognosen möglich?

2) **Theoretischer Ansatz I** **(diskretes Modell)**
Die Temperaturänderung ist proportional zur Temperaturdifferenz Kaffe – Zimmertemperatur.
Suche eine passende rekursive Folge und stelle sie grafisch dar. Setze für den Proportionaltätsfaktor einen willkürlichen Wert, z.B.: 0.1).
Vergleiche mit den Messdaten und variiere den Faktor so, dass Messdaten und Folge möglichst gut übereinstimmen.

3) **Theoretischer Ansatz II** **(stetiges Modell)**
Von der Folge mit den Zeiteinheiten $\Delta t = 1$ gelangt man durch Umformung, Verkleineinerung der Zeiteinheiten und Grenzwertbildung $\Delta t \to \infty$ zur Differenzialgleichung

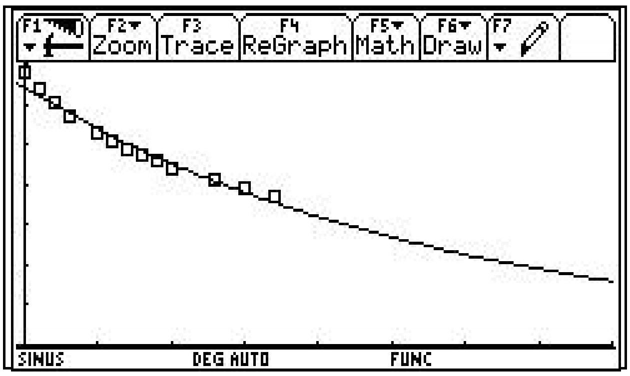
$$y' = - k\cdot y + k\cdot 18.7$$

Löse diese Differenzialgleichung mit dem TI und bestimme die dabei auftretende Konstante mit Hilfe der Messdaten.

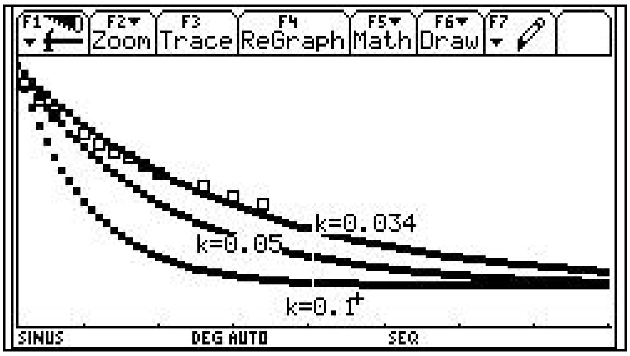
4) **Vergleich**
Vergleiche und beurteile die verschiedenen mathematischen Modelle (schriftliche Ausarbeitung).

Lösungsvorschläge:

1) Daten erfassen, grafische Darstellung, Exponentialfunktion anpassen ($y = 64.2\cdot 0.983^x$).
Problem. Die Regressionsfunktion ist für langfristige Prognosen ungeeignet, die Temperatur würde unter Zimmertemperatur fallen.



2) Rekursive Folge:
$u(n) = u(n-1) - k\cdot[\, u(n-1) - 18{,}7]$
Die grafische Darstellung erfolgt im SEQUENCE-Mode, der Parameter k wird variiert.
k = 0.034 liefert eine brauchbare Näherungslösung.



3) Anstelle der Schrittweite 1 wählen wir Δt.
$u(t + \Delta t) = u(t) - k\,(u(t) - 18{,}7)\,\Delta t$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = -k(u(t) - 18.7)$$

also
$u'(t) = -k \cdot u(t) + k \cdot 18.7$ Der TI-92 löst diese Differenzialgleichung:

$u(t) = C\, e^{-kt} + 18.7$

Mit Hilfe der Messwerte lassen sich k und C bestimmen, man erhält die Funktionsgleichung
$u(t) = 49{,}3e^{-0.03t} + 18.7$.
Die Beurteilung der verschiedenen mathematischen Modelle schließt sich an.

Literatur:

H. Weller Wahlhochrechnung mit CAS
in F.Foerster u.a. (Hrsg.):Materialien für einen realitätsbezogenen MU, Band 6 S.118-122
Franzbecker 2000

B. Barzel Bericht zur AG: "Einbindung des Computereinsatzes im regulären Unterricht"
in H. Hischer (Hrsg.) Modellbildung, Computer und MU S.174-177
Franzbecker 2000